ENTDECKENDES LERNEN – ZAHLENKETTEN

Sachstruktur

„Zahlenketten"[1] sind Spezialfälle einer endlichen **Zahlenfolge**[2]. Ihre Bildungsregel lautet[3]: Wähle zwei (nicht negative) **Startzahlen** und schreibe sie in die ersten beiden Kästchen. Die Summe der beiden Startzahlen ergibt die dritte Zahl. Die Summe der zweiten und dritten Zahl ergibt die vierte Zahl, usw..

- Folglich[4] handelt es sich um eine rekursive Folge $<a_n>$ (mit $a \in N_0, n \in N$), da außer den Startzahlen (a_1, a_2) jedes Folgeglied a_n durch die beiden vorangegangenen Glieder definiert wird: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ (**rekursive Bildungsvorschrift**).[5]

10	5	15	20
a_1	a_2	a_3	a_4
		a_1+a_2	a_2+a_3
			a_1+2a_2

Abb. 1

- Die **Endlichkeit** der Folge resultiert aus der Vorgabe von vier/fünf Gliedern, während durch die Vorgabe einer <u>Zielzahl</u> (z.B. a_4=20 oder a_5=100) sowie die Grundmenge N_0 die **Eigenschaft** der **Beschränkung** nach oben und nach unten (das kleinstmögliche erste Glied a_1= 0) gegeben ist.

20	20	40	60	100
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
		a_1+a_2	a_2+a_3	a_3+a_4
			a_1+2a_2	a_2+2a_3
				$2a_1+3a_2$

Abb. 2

Aus dieser Rechenvorschrift ergeben sich für den Grundschulunterricht zahlreiche produktive Aktivitäten, wobei sich „die Aufgabenstellung, eine vorgegebene Zielzahl zu erreichen, besonders bewährt hat."[6] Der Stundeninhalt ist von der Sache her zudem eine **herausfordernde Problemsituation**[7]: das Ziel (die Zielzahl) ist bekannt, aber nicht der Weg dorthin (die restlichen Glieder). „Der Lösungsweg ist nicht von vornherein überschaubar. Es gibt ... mehrere Lösungswege" (SCHÜTTE 1994, 71). Die Zahlenkette erscheint den Kindern vertraut (Vier-/Fünfgliedrigkeit, visuelle Struktur, Bildungsregel und die damit verbundenen Rechenfertigkeiten), aber sie enthält „doch auch unbekannte, fragwürdige Elemente" (WINTER 1994, 17), vor allen Dingen, weil die Kinder sie „mit den verfügbaren Kenntnissen und Techniken nicht in einem Zug ... vollständig lösen" können. (WITTMANN 1981, 102) Das verlangt eine **„Strategie"** unter Beachtung - ggf. unter Ausnutzung - der Bildungsregel, wobei aufgrund der Aufgabenstruktur möglich sind: [8]

„Vorwärtsarbeiten"

Mit Versuch und Irrtum versuchen, von den Startzahlen ausgehend die Zielzahl zu erreichen

---

[1] Vgl. SCHERER 1996; SCHERER/SELTER 1996; SELTER/SCHERER 1996.
[2] Vgl. ENGESSER/SCHEID 1994.
[3] Vgl. SCHERER 1996, 20; SCHERER/SELTER 1996, 21
[4] Zum Folgenden vgl. ENGESSER/SCHEID 1994.
[5] In dem Sonderfall $a_1 = a_2 = 1$ handelt es sich um die Folge der sog. „**Fibonacci-Zahlen**"; vgl. PADBERG 1993, 141-144. Zu weiteren, allgemein-mathematischen Hintergründen von Zahlenketten vgl. SELTER/SCHERER 1996, 58-63 und KRAUTHAUSEN/SCHERER 2014, 120ff., die u.a. auch 4-gliedrige Zahlenketten mit der Zielzahl 50 mathematisch beleuchten.
[6] KRAUTHAUSEN/SCHERER 2014, 120.
[7] Vgl. SCHÜTTE 1994, 70f, Winter 1994, 16f
[8] Vgl. zum Folgenden STEIN 1996, 133ff, SCHÜTTE 1994, 71

„abstandsgeleitetes Vorgehen“

Je nach 'Abstand' - der berechneten 4./5. Zahl von der eigentlichen Zielzahl 20/100 - wird eine oder werden beide Startzahlen verkleinert bzw. vergrößert - ggf. unter Ausnutzung operativer Beziehungen, wie z.B.: Erhöhung von a_2 wirkt sich stärker auf die Zielzahl aus (vgl. *Abb. 1*: $a_1 + 1 \Rightarrow a_4 + 1$; $a_2 + 1 \Rightarrow a_4 + 2$ / *Abb. 2*: $a_1 + 1 \Rightarrow a_5 + 2$; $a_2 + 1 \Rightarrow a_5 + 3$)[9]

„Rückwärtsarbeiten“ und „Suche nach Teillösungen“

Dies ist der Versuch, von der Zielzahl ausgehend, die Voraussetzungen für ihre Erreichung herzustellen, sprich: Welche zwei Zahlen ergeben zusammen die Zielzahl (20 = a2 + a3 / 100= a3 + a4) ?

Letzteres Vorgehen ist dabei der Ansatz für die „eleganteste“ Lösung. Ausgehend von dem Teilproblem '20er/100er-Zerlegungen' können auf sehr ökonomische Weise - durch Nutzung operativer Beziehungen (z.B. 20 = a2 + a3 ; a3 = a1 + a2 bzw. a1 = a3 - a2) - Lösungen bestimmt werden.

Des Weiteren liegt darin sogar die Begründung dafür, dass

- nur 20er-Zerlegungen in Frage kommen, bei denen $a_3 \geq a_2$ ist sowie der Beweis dafür, dass (mit a N_0) nur 11 Lösungen existieren (vgl. *Abb. 3*) bzw. dass
- nur 100er-Zerlegungen in Frage kommen, bei denen $a_4 \geq a_3$ ist sowie der Beweis dafür, dass (mit a N_0) nur 17 Lösungen existieren (vgl. *Abb. 4*).

a_1	a_2	a_3	a_4
20	0	20	20
18	1	19	20
16	2	18	20
14	3	17	20
12	4	16	20
10	5	15	20
8	6	14	20
6	7	13	20
4	8	12	20
2	9	11	20
0	10	10	20

Abb. 3

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
2	32	34	66	100
5	30	35	65	100
8	28	36	64	100
11	26	37	63	100
14	24	38	62	100
17	22	39	61	100
20	20	40	60	100
23	18	41	59	100
26	16	42	58	100
29	14	43	57	100
32	12	44	56	100
35	10	45	55	100
38	8	46	54	100
41	6	47	53	100
44	4	48	52	100
47	2	49	51	100
50	0	50	50	100

Abb. 4

Die „**arithmetische Struktur, die Beziehung zwischen den Zahlen**” (LORENZ 1997, 95), die sichtbar wird in der spezifisch-regelmäßigen Zahlverteilung innerhalb der jeweiligen Glieder (gerade Zahlen; 0 - 10; 20 - 10), besteht folglich in …

4 Glieder, Zielzahl 20	5 Glieder, Zielzahl 100
den Zerlegungen der 20	Zerlegungen der 100
der regelmäßigen Veränderung einzelner Zahlenglieder (je nach Sichtweise: +/- 2 , +/- 1)	der regelmäßigen Veränderung einzelner Zahlenglieder (je nach Sichtweise: +/- 3 , +/- 2, +/- 1)
der regelmäßig-gegensinnigen Veränderung verschiedener Glieder	der regelmäßig-gegensinnigen Veränderung verschiedener Glieder

[9] Darin liegt zugleich auch die Begründung dafür, dass bei 4 Gliedern für a_1 bzw. bei 5 Gliedern für a_2 **nur gerade Zahlen** möglich sind, denn: 20 bzw. 100 sind gerade Zahlen. Die Summe einer ungeraden und einer geraden Zahl wäre immer ungerade. Daher müssen folglich a_1 (4 Glieder) bzw. a_2 (5 Glieder) gerade Zahlen sein. Zur allgemeinen Begründung vgl. SELTER/SCHERER 1996, 61-63.

Literatur

ENGESSER, H. (Hrsg.).)/SCHEID, H. (Bearb.): Duden Rechnen und Mathematik. Das Lexikon für Schule und Praxis. 5. überarb. Aufl. , Mannheim 1994 [Stichwörter: *Folge* (S.178-182); *rekursive Folge* (S. 537-538); *Fibonacci-Zahlen* (S. 166-167)

KRAUTHAUSEN, G. / SCHERER, P.: Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht. Kallmeyer in Verb. mit Klett, 2014

LORENZ, J.H.: Kinder entdecken die Mathematik. Braunschweig 1997

PADBERG, F.: Elementare Zahlentheorie. 2. überarb. u. erw. Auflage, Mannheim 1991, korrig. Nachdruck 1993

SCHERER, P.: Zahlenketten. Entdeckendes Lernen im 1. Schuljahr. In: DIE GRUNDSCHULZEITSCHRIFT, H.96, 1996, S. 20-23

SCHERER, P./SELTER, Ch.: Zahlenketten - ein Unterrichtsbeispiel für natürliche Differenzierung. In: Mathematische Unterrichtspraxis, H.2, 1996, S. 21-28

SCHÜTTE, S.: Mathematiklernen in Sinnzusammenhängen. Probleme und Perspektiven der Grundschulmathematik heute. Stuttgart 1994

SELTER, Ch./SCHERER, P.: Zahlenketten - Ein Unterrichtsbeispiel für Grundschüler und Lehrerstudenten. In: mathematica didacta, H. 1, 1996, S. 54-66

STEIN, M.: Elementare Bausteine der Problemlösefähigkeit: Problemlösetechniken. In: Journal für Mathematikdidaktik, H. 2, 1996, S. 123-146

WINTER, H.: Mathematik entdecken. Frankfurt a.M. 19944

WITTMANN, E. Ch.: Grundfragen des Mathematikunterrichts. 6. neu überarb. Aufl., Braunschweig 1981